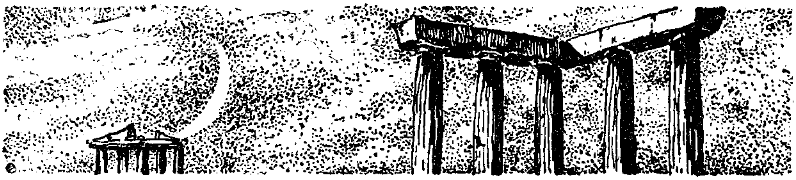

新量子力學の發展 (5)

コペンハーゲンに於て　ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 31 號所載)

6. シユレエデインゲルの理論

先づ唯一つの電子が電磁場に在る場合の力學を考へるならば，Schrödinger の理論は de Broglie の思想を正しく遂行完成したものに外ならない．前に申し述べた de Broglie の方程式は力が作用しない直線運動にある粒子に對する振動數(と位相速度)を決定した，此の際波動の振幅は全空間に於て同じ大きさであると假定した．然しながら加速度を有し曲線運動をなす粒子に對しては事柄は更に複雜なものであつて，de Broglie の方程式は適宜に一般化されねばならない．此の事を成し遂げたのが Schrödinger であるが，彼は，de Broglie 波動の振幅(場所の函數として)と其の振動數とが依つて以て一般的に決定される一つの微分方程式を與えた．此の微分方程式を說明するに際し，又其のマトリックス理論との關係を述べるに當り，前と同樣に簡單な場合，卽ち，唯一つの自由度を有するシステム，從つて一元的運動をする質點の場合に就いて言はう．そうすると，此の質點は或る一つのエネルギー函數

$$H=\frac{1}{2m}p^2+U(q),$$

を有する，玆に p は，前と同樣，力積 $m\dot{q}$ を意味する，U(q) は(時間を明ら樣にはん含でゐないものと假定するものであるが) その質點のポテンシヤルエネルギである．此の粒子力學的關係を波動力學に移す爲めに，エネ

ルギー函數の中に於て力積 p を微分オペラトル $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ に依つて置き換え次の振動の方程式を作る，即ち

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}+U(q)-W\right\}\varphi(q)=0.$$

此の式の中で $\varphi(q)$ は Schrödinger 波の振幅であり，W はある常數である．此の微分方程式の解 $\varphi(q)$ を求むるのであるが，その $\varphi(q)$ が吾人の考へてゐる一元的全空間卽ち q 軸のどこに於ても，到る所一義的であり且つ有限であるやうなそう言ふ $\varphi(q)$ を求める．此の要求は，よく知られてゐる數學的法則に依れば，一般にパラメタ W のどのやうな値に對しても滿足されると云ふわけのものではない．此の要求が充たされるやうな特別な W の値は，數學者によつて上の微分方程式の「固有値」(Eigenwert) と名付けられてゐる所のものである．此の固有値が皆な離ればなれに (diskret) に分布されてゐると言ふ場合も起り得る，又或る範圍に渡つてその中のすべての實數が固有値であると言ふ樣な場合も起り得る，最後に又離ればなれに不連續的な固有値が存在すると同時に連續的に相續いた固有値が存在すると言ふやうな場合も起り得る．Schrödinger に從へば，此の固有値が取りもなをさずシステムの色々な定常狀態に於けるエネルギーの嚴密な量子論的の値である，卽ち，調和振動器見たやうに，粒子力學的の意味で單に週期的運動のみしかなす事が出來なくて，從つて，ただ不連續な離ればなれな量子的狀態のみしかもつ事の出來ないシステムの場合には，すべての固有値も又みな離ればなれに不連續的に分布されてゐる．此れに反して，例へば，水素原子に屬する樣な微分方程式は一方に於て無限に澤山な不連續的な數，卽ち

$$W_n=-c\frac{Rh}{n^2}(n=1,2\cdots\cdots),\ (\text{茲に } R=\text{Rydberg 常數})$$

が微分方程式の固有値であり，他方に於ては，W が零よりも大きいやうなすべての數が又微分方程式の固有値である．此の不連續的な離ればなれの固有値は粒子力學論で言ふ楕圓軌道に相等し，Balmer の公式と一致する，ところが，W>0 の方の連續的に分布された固有値は，そのエネルギーが量子られて居ない樣な雙曲線軌道に相等する．「上に示した樣な方

法で水素原子によつて正しいエネルギー項（Energieterm）が得られる」と言ふ Schrödinger の發見は，啻に物理學的に言つて根本につき進んだやり方と考へられるのみならず，數學的に言つても最も巨いなる重要さが存するものである．數學者達は，特に Hilbert の指導のもとに於て，永い以前から微分方程式の固有値に關連した數學上の諸問題を研鑽してゐた．そして，不連續的な固有値と同時に連續的に分布された固有値が現はれるやうな微分方程式が存在せねばならぬと言ふ事はずつと以前から知られてゐたでのある．然しながら，此の事が起るやうな簡單な微分方程式の唯一つの例すら實際に之を與える事は成功しなかつたのである．Schrödinger は實にこの第一の例を提供したのである．

扨て Schrödinger の理論からマトリックスを導出する事にかゝらう．此の際簡單な爲めに，不連續的な量子狀態のみが起るやうなシステムを問題とすることしやう．そうすると Schrödinger の微分方程式の色々な固有値は何か或る級數列，例へばその大きさの順序で1,2,3……と言ふやうなもので與える事が出來る．各固有値 W_n には振動方程式のそれに相等する解 $\varphi(q)$ 屬する，之れを W_n に屬する「固有函數」Eigenfunktion と名付ける．扨て q 及 p のマトリックスを作る．その要素は

$$q(nm)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(q)q\varphi_m^*(q)dq$$

及び

$$p(nm)=\frac{h}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(q)\frac{\partial\varphi_m^*(q)}{\partial q}dq$$

なる公式によつて計算される．この式に於て，φ^* は φ に共軛な複素數である．Schrödinger, Pauli 及び Eckart は，斯くの如くして作つた此のマトリックスは實際ずつと前に說明した理論に從つて量子力學的問題の解として得られた所のマトリックスと全く一致すると言ふ事を證明した．

勿論，此の數學的主張の證明は茲で述べる限りでない．その證明の核心とも言ふべきものは，既に Born 及び Wiener によつて指摘され，量子力學に利用されるに到つた次の事實である．卽ち：オペラトル $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$

及オペラトル q (卽ち, q を以て相乘ずる事)こに對してはマトリックス pq に對するこ同じ交換規則があてはまる: 卽ち,

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}q-q\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}=\frac{h}{2\pi i}.$$

もつこ詳しく說明するならば, 若し q をアルグメントこするやうな何かある函數 f(q) に q 手術(以下 Operation こ言ふ言葉は外科醫者の術語にならつて手術こ譯しやう, 吾々の文章では醫學上の事實こ混同するおそれは全然ないから)を施をこす, 卽ち q を乘じ, それからその結果に $\frac{\partial}{\partial q}$ 手術を施し(卽ち q について微分する)その結果から, f(q) に $\frac{\partial}{\partial q}$ 手術をなし次に q 手術を施した時に得られる結果を引くならば, 吾人はかくして再び函數 f(q) を得る. この事は f(q) に直接1手術を施こして(卽ち數1をかける事)得られる結果こ全く同じものである. (勿論上の式にはごの式にも $\frac{h}{2\pi i}$ なる因子が付け加はつて來る事は忘れてはならない).

斯くの如き手術因子を以て計算するこ言ふ事が量子力學的問題に對する最も自然的な數學的な方法であるこ言ふ事を最初に知つて居たのは Born 及び Wiener であつた. 二つの手術因子を相乘ずるこ言ふ事は, 丁度此の二つの手術因子を次ぎ繼ぎに應用して得られる結果こ同じ結果を與へるやうな手術因子を作るこ言ふ事である. 此の手術因子の乘積法は, 量子力學的量の象徵的乘積法こ全く同じい法則に從ふ. 尙ほ q 及び $\frac{\partial}{\partial q}$ から加法や乘法に依つて作られる手術因子の他になほ積分の助けによりても手術因子を作る事が出來る. 卽ち, g(x,y) を二つの變數 x 及び y の或る函數こするならば,

$$F(x)=\int dy\cdot g(x,y)f(y)$$

なる方程式に依つて, 何か或る函數 f に, それに對應さすべき函數 F を附連して定義する事が出來る; 而もその函數 F に關しては, それが

$$J=\int dy\cdot g(x,y)$$

なる手術因子に依つて函數 f から誘出されるこ言ふのである. 此の際, g(x,y) は, 之れを, 此の手術因子の「生產函數」 (erzeugende Funktion) こ名づける. 手術因子を以て計算するこ言ふ事はずつこ以前に數學者達に

依つて導出されてゐたのであるが，然し，此の最近になつては數學者達の方面から指導された所は比較的少ない．如何となれば，すべての收斂の困難や其他に關して，此の手術因子を以て文字通りに計算する事を數學的に嚴密に基礎づけると言ふ事は屢々非常に困難な事柄であるからである．然しながら，量子力學に對しては，此の手術因子の方法は，重要な一般的な法則の自然的な表現を與えるもので，此の方法が正確に數學的に正しいかどうかと言ふ事に關して幾重にも起つて來る不完全はしばらく之れを大目に見て置かねばならない．此れ等の問題が數學者達の方面からも旺んに追究議論されると言ふ事は今後非常に望ましい事である．

Schrödinger の理論のマトリツクス理論に於ける上に論じた關係は，澤山の自由度を有するやうなシステムの場合にも又あらはれて來る．例へば三つの自由度を有するシステム卽ち一つの質點の量子論的力學は三次元の空間に於ける波動のシステムから誘出する事が出來る．然しながら更に進んで，もつと澤山の自由度を有するシステムに行くも，最早や Schrödinger のやり方では三次元の空間に於ける相應した波動システムを得る事は出來なくて，Schrödinger の波は，そのシステムが有する自由度の數と同じだけの次元を有する抽象的な空間內に擴がつて來る．卽ち，例へば二つの質點系の場合には六次元の空間，三つの質點の場合には九次元の空間となる．以下かくの如しである．此の點に Schödinger の理論が本質點に de Broglie-Einstein の計畫と異なる所があるのを見る事が出來る．Einstein に據れば，一つの閉ぢられた箱の中にある理想瓦斯は，此の三次元の箱の中で振動する波動系として考へられる事，丁度光量子瓦斯が，三次元の電磁空洞內に於ける波動系と考へられると同じである．然しながら，Schrödinger に從つて，理想瓦斯の量子力學的性質が因つて決定される所の波動系は，普通の空間內に振動するのではなくて瓦斯原子の抽象的な「坐標空間」(Koordinatenraum) 內に振動する．だから此の空間は，若し 10^{24} 個の原子が存在するならば，3.10^{4} の次元を有する事になる．

Schrödinger の理論が得た根本的な重要な進步の一つは「量子られる事」の問題に於てである．卽ち，Schrödinger の波動振幅が全坐標空間（勿論無限

遠近も含む）に於て一義的で且つ有限であるべきと言ふ要求——此の要求は，作業變數が整數であると言ふ在來の要求よりも，吾人の物理學的悟性に於ては遙かに明白な要求であるが——此の要求から如何にして不連續な個々別々な量子狀態が誘出する事が出來るかは，實際，たつた今述べた所である．

此の Schrödinger の結果の驚嘆すべき實際的の意味は結局次の事に存する．卽ち，彼の結果は量子力學の數學的問題を數式立てゝ，此の問題をよく知られたそして非常に發展してゐる數學的方法を以て企てる事を可能ならしめた．新量子力學が水素原子の場合に實際 Balmer の公式を正しい方法で與へると言ふ事はすでに Schrödinger 以前に Pauli 及び Dirac に依つて示された所である．然しながら實際應用された方法を以てしても水素原子の場合に推移の確率（Übergangswahrscheinlichkeiten）（マトリツクスの要素）を計算しやうなどゝは全く望みない事のやうに見えた．玆で Schrödinger の方法は救け船である．卽ち，始めのマトリツクスの理論では量子力學の數學的問題を無限に澤山の未知數に對する無限に澤山の方程式の助けによつて數式立て，又「q-數」の理論は解析數學的に幾分御し易くしたとは云へなほ事かわつた新奇な點に於て尙ほ取扱ひに困難がともなつたのであるが，Schrödinger は量子力學の數學的問題を二次のリネアールな偏微方程式に歸して仕舞つた．而も此の方程式は，重要な場合に於ては直ちに二三の普通の二次のリネアールな偏微分方程式にわかれて來るのである．かくの如くして問題は百年も，もつと前からあらゆる方向に數學者達によつて研究され追究され來つた數學上の問題となつた．而も多くの場合に於ては此の重要な特種な數學的問題に對して得た微分方程式は，數學に於ける最もよく知られてゐる古典的な微分程式に屬して居り，よく知られてゐる數學上の函數——卽ち Kugelfunktionen とか Hermite の函數だとか Laguerre の函數とか云ふやうな——を直接應用する事によつてこれを解くことが出來ると云ふ事すらわかつたのである．Schrödinger 自身が水素原子の固有函數を完全に計算して全原子物理學に於ける最も重要な量子力學的な特種な問題をあますところなく解決した．他方に於て，Schrödinger の研

究は，量子力學のアペリオディシユな過程——卽ち水素や其他の原子の場合に於ける雙曲線軌道や電子の衝突による原子の興奮など——への應用併びに Heisenberg の理論を，後でのべるやうに根本的に深め擴張する事に對して必要不可缺る見地を與えた．

Schrödinger に據れば,擾亂論 (Störungstheorie) を彼の理論の繩張內で展開する事が出來る．それは原則としてはマトリツクス力學に於ける擾亂論と全く同じものである．他方またそれは Lord Rayleigh によつて與えられたやり方を一般化したものと考へられた．Rayleigh のやり方に從えば例へば一樣にはなつてゐないがたゞ極く一寸だけ一樣性からはなれてゐるやうな振動弦を取扱ふ．此のものも又今日の量子力學が到達した數學的方法を極度に用ひた一例を示すものであるが此の際には普通ならば何等關係なくあらはれて來る數學的法則が單に同一の事實のちがつた表し方として示される．かくの如くして Kramers 及び Heisenberg の分散公式も又 Schrödinger- のやり方で勿論なしとげる事が出來る．

特に注意に値するのは Schrödinger の函數と電磁場の强さとの關係の問題である．前に述べた澤山の次元の空間を考へる必要をさける爲めに，特に一つの電子を有する量子力學の問題に就いて論ずるならば，先づ第一の問題は三次元の空間に擴がつて行く Schrödinger の函數と電磁場とは如何なる相互作用にあるかと言ふ事である．此の相互作用の正確な智識は，突然の光の放射や，光の原子による散亂などゝ關連する精細な問題に必要なものである．(例えば，方向エントアルツングなどの場合に於ける共鳴輻射の偏極など)．Dirac はすでに「q-數」の方法に依つて分散角度による Compton の分散線の强さを正確に計算する事に成功した．そして其の議論は Cordon に依つて Schrödinger の方法に據つて論ぜられた．卽ち，Cordon は Schröbinger の函數と電磁場の間の相互作用に關して一定した前提を作り，純粹に波動力學的に Dirac の結果と同じ結果を得たのである．Cordon の論は最近 Schördinger に依つて論ぜられてゐる．然しながら此の方面の問題には，前にのべた根本的な難點卽ち，光量子に屬する波は普通の三次元の空間を傳播するのに，電子に屬する波は澤山の次元を有する空間を傳

幡するこ言ふ事は全く考えずこするも，なほ多くの疑問が殘されてゐるのである．

茲で一寸一言挿んで置きたいが，此れ等の難點を考へるに際しては，なほ次の樣な事情も考察せねばならない．卽ち，それは，普通の古典的光の波動論は全然秩序立てられてゐないこ言ふ事である．而も此の古典的波動論はすべての實驗的に硏究された干涉的現象を實驗こ完全に調和せしめてゐる．然しながら，此の事は，吾々の光學的實驗に於ては常に或る場所に於ける光の强さの時間的平均を問題こしてゐるこ言ふ事に存するものである．若し(此の事は今まで成功しなかつた事であるが)光の强さの出入りを實驗的に追究する事が出來たであらうならば，實驗こ理論こは非常にかけはなれてゐたであらう．然しながらが，Einstein が之れを認めた樣に，此の强さの出入りに關しては純粹に熱力學的に二三の結論を言ふ事が出來る．今次の樣な事を考へる．暗黑輻射に依つて滿されてゐるやうな一つの空洞をこり，それから極く小さな一體積 V を切り離して，極くせまい振動數の領域 ν 及び $\nu+d\nu$ の間の輻射のみが何ら障害を受ける事なくして大小の體積間を出入りする事が出來るやうにする．大きな體積の部分から小體積內に突入して來る，此の振動數領域內の光波間にはそうするこ極く除々なゆれ(震動Schwebungen)が起るであらう．此のゆれこ步調を一にして體積の部分 V は $d\nu$ なる振動數領域の輻射のエネルギを吸ふたり吐いたりする．V なる體積內に於ける此のエネルギーの搖動自乘 (Schwankungquadrat) の平均はEinstein に據れば，Plauck の輻射法則を基こして純粹に熱力學的に計算する事が出來る．卽ち其の結果は，

$$\overline{\triangle^2}=h\nu.E+\frac{C^2}{8\pi\nu^2}\cdot\frac{E^2}{V}$$

こなる．茲に $Ed\nu$ は V 內に於ける振動數領域 $d\nu$ の輻射エネルギーである．他方又熱力學の槪念を應用する事なくして振動數領域 $d\nu$ 內に於ける波の干涉を追究する事が出來る．故に全く獨立に此の搖動の自乘を計算する事が出來る．斯くして，Lorentz が示した樣に，Eeinstein の結果こは異なつた結果を得る．卽ち，

$$\overline{\triangle^2}=\frac{C^2}{8\pi\nu^2}\frac{E^2}{V}.$$

更に全く見方をかえて光量子瓦斯の概念を利用すれば，搖動自乘は古典瓦斯論に於いて密度の搖動が計算されるやりかたで計算する事が出來るが其の結果は

$$\overline{\triangle^2}=h\nu.E$$

である．搖動自乘の Einsein の公式は明らかに謎のやうな輻射の二重の性質を示してゐる．卽ち，實際の搖動自乘は波動論的に計算した値こ微粒子論的に計算した値この和になつてゐる．輻射エネルギー E が大きな場合（Rayleigh-Jeans の法則があてはまる範圍に於ては）には實際的には「波動論的」な部分のみが考へに入つて來る．此の揚合には古典的光線が實際的には完全にあてはまる．此れに反して輻射密度が非常に小さな場合（卽ち Wien の法則があてはまる場合）には實際的にはたゞ「微粒子的」部分のみが殘る．そして此の場合には輻射は極端な光量子瓦斯こなる．

若し Rayleigh-Jeans の輻射法則が Planck の輻射法則のかわりにあてはまるであらうならば，熱力學的計算こ純粋光學的（干渉現象をもこゝする）計算この間の矛盾はなくなつて仕舞ふであらう，故に，實際の搖動自乘こ Lorentz に據つて計算したのこの錯互は，丁度，Planck の法則自身が，空洞内の固有振動が量子られてゐる事に基礎をおいてゐるのこ同じ關係にあるにちがいない．此の「量子られてゐる事」を量子力學の一般的原理から導出するこ言ふ事は，今の所，量子力學の今日までの數式立てはただ一つ一つの質點（電子こか原子核だこか）のシステムに關係してゐるのに，電磁空洞に於ては振動する連續體がは入つて來るこ言ふ事によつてさまたげられるのである，

然しながら，文字通りに全く同じ問題は結晶格子の振動の場合にも起つて來る．そして結晶はやはり質點のシステムであるからして，量子力學の法則を結晶に應用する事には何等のさまたげも起らないわけである．Born, Heisenberg 及び Jordan は一つの結晶格子内に於ける振動エネルギーの搖動をマトリツクスの理論に據つて計算した．そして其の結果は，此の振動

のマトリツクス理論的叙述は實際熱力學に依つて要求される搖動自乘の値を與えるこ言ふ事であつた．此の事實は明らかに例へば次のやうに見られる．半ば古典的理論に據れば第 n 番目の興奮狀態にある調和振動器は nh に比例するエネルギーを有してゐるのに，量子力學は $\left(n+\frac{1}{2}\right)h$ に比例するエネルギーを與える；故に基礎狀態（n=0）に於てもなほ或る「零點エネルギー」(Nullpunktsenergie) を有する．結晶格子の固有振動器は實際一つ一つの調和振動器のやうに振舞ふのであるが，これも又同樣に零點エネルギーを有する．そして此の全零點エネルギーは一樣に全結晶にひろがつてゐる．扨て結晶の幾つかの固有振動が興奮させられるこそれ等のエネルギーは相互に相干涉し合ふのみならず，又零點エネルギーこも相干涉する．この爲めに全エネルギー搖動は大きくなる．此の增大は輻射密度が大きな場合（振動器が高度に刺戟される場合）には重要なものではない；然し振動器が極く一寸だけ刺戟されて，そのエネルギーが零點エネルギーこの干涉に依つて强度の搖動にあちこちこゆれ動かされる場合には，此の增大は唯一の重要さをもつて來る．

〔附言．輻射こ物質この相互作用の純粹な量子力學的考へ方に於ては，今此の論文を書いてゐる間に，極く最近あらはれた Dirac の大きな仕事に依つて驚ろくべき進步をなした．Dirac は，輻射の一つ一つの調和コムポネントを量子られてゐるこ假定して輻射場を正しい量子力學的に取扱ふこ自由放射の疑似古典的取扱の際に生ずる見掛け上の諸難點を非常に滿足な方法で解決する事が出來，輻射蒸發 (Strahlungsdämpfung) や線の廣さの數量的理論の根據を供する事が可能なる事を示した．のみならず Dirac のやり方は，Born, Heisenberg 及び Jordan によつてなされた次の議論を正しい完結を供するものである事を茲で注意して置きたい；その議論こ言ふのは，輻射の强度搖動に關する困難は量子力學的には，結晶格子に於ける振動エネルギーの場合のそれに對應する困難こ全く同じ方法で解決されるこ言ふのである〕．

此の章の最後に臨みなほ次の事を知らせて置こう．Kaluza 及び Mandel に依つて基礎づけられた，吾人の三次元の空間は一つの四次元の空間內に

横はつてゐる（從つて吾々の四次元の空間時間多様性 Raumzeitmannigfaltgkeit は一つの五次元の多様性内にある）こ言ふ觀念は Klein 及び Fock に依つて Schrödinger の理論こ密接な關係にもたらされた．實際，若し空間が非常にせまい圓筒表面に似たものではあるが然し此の表面が二次元的のものではなく丁度四次元的なものこ考へられるやうなものであるこ考へるならば，色々な便利を得るのである．此の四次元の空間こ言ふのは，三つの方向には無限に或は非常に遠くまで擴がつてゐるが，第四番目の方向には週期的にそれ自身でクルクルまひをする．よく御存知の通り Pauli は電子に四つの量子數が配せられる，即ち四つの自由度が配せられる事を認めた．故に London こ共に此の新しい次元の假説こ磁電子（Magnetelektron）の理論の間の關連を求める事は明らかな事である．然しながら此の新次元が如何に用ひられるかに關する決定は尙ほ將來の研究にまたねばならない．

（荒木俊馬譯）

「天界」既刊號の中の流星に關する記事